

1.1 VARIABILITÀ SPAZIO TEMPORALE DELLE GRANDEZZE FISICHE

1.1.1 Variabilità spazio temporale delle grandezze fisiche

Nello studio dei fenomeni fisici si considerano grandezze misurabili il cui valore può variare sia nello spazio che nel tempo; considerando ad esempio la temperatura per indicare la variabilità nello spazio e nel tempo si fa normalmente uso della notazione:

$$T = T(P, t)$$

o di notazioni simili, per nelle quali P rappresenta una posizione spaziale e t rappresenta un istante.

Si è soliti fare uso dell'espressione **COSTANTE** per indicare che la grandezza non varia nel tempo e dell'espressione **UNIFORME** per indicare che la grandezza ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio in esame. Considerando ancora la grandezza temperatura, le caratteristiche di Costanza e di Uniformità si possono matematicamente rappresentare nel seguente modo:

$$\text{COSTANZA: } \frac{\partial}{\partial t} T(P, t) = 0 \quad \text{UNIFORMITÀ: } \frac{\partial}{\partial P} T(P, t) = 0$$

Le modalità con le quali le grandezze variano nel tempo e nello spazio dipendono dalla consistenza delle **SORGENTI** dei campi stessi.

1.1.2 Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze che si prendono in considerazione nello studio di vari fenomeni fisici possono essere di tipo scalare oppure vettoriale. Mentre per le grandezze di tipo scalare si considera solo l'**INTENSITÀ**, per le grandezze vettoriali bisogna considerare anche una direzione ed un verso. Per rappresentare delle grandezze scalari si usano in genere delle lettere semplici, mentre per rappresentare le grandezze vettoriali si usano delle lettere con un sovrassegno:

- grandezza scalare variabile nel tempo e nello spazio:

-

$$S = S(P, t)$$

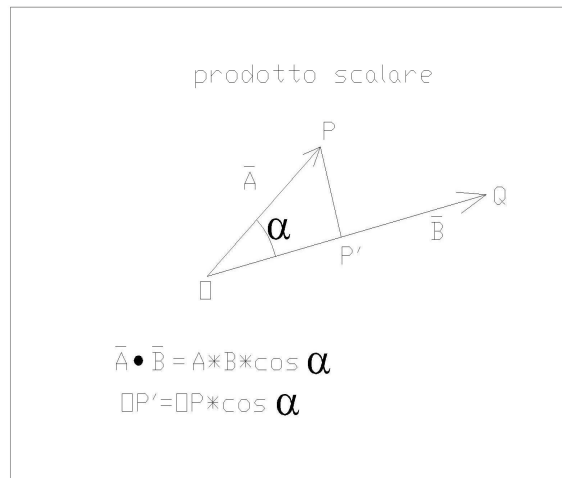
- grandezza vettoriale variabile nel tempo e nello spazio:

-

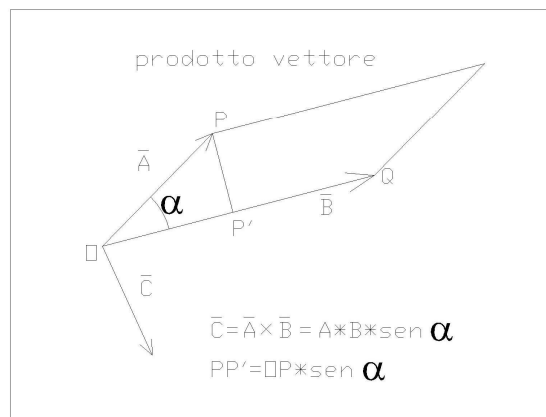
$$\vec{V} = \vec{V}(P, t)$$

Tra grandezze vettoriali si considerano le operazioni di **somma** e **sottrazione** da eseguire con la regola del parallelogramma.

Si considerano inoltre due tipi di prodotto:
 - **prodotto scalare**; - **prodotto vettoriale**.



Il prodotto scalare ha come risultato una quantità scalare pari al prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il coseno dell'angolo, **minore di π** , compreso; può essere visto anche come il prodotto del modulo di uno dei due per la proiezione dell'altro sulla direzione del primo.



Il prodotto vettoriale ha come risultato una quantità vettoriale la cui direzione è quella della perpendicolare al piano individuato dai due vettori e la cui intensità è fornita dal prodotto dei loro moduli per il seno dell'angolo, **minore di π** , compreso; il verso del vettore risultante è quello che si ottiene con la regola della mano destra portando il primo vettore a sovrapporsi al secondo ruotando del più piccolo dei due angoli. Il modulo del prodotto vettore può essere visto come l'area del parallelogramma costruito con i due vettori.

1.1.3 Sistemi di riferimento

Per individuare la posizione di un punto nello spazio si è soliti fare uso di sistemi di riferimento trirettangoli cartesiani $Oxyz$ con orientamento DESTROGIRO. La dipendenza di una grandezza dalla posizione solitamente può essere indicata con diverse notazioni equivalenti:

$$S = S(P, t) = S(x, y, z, t) = S(\vec{r}, t)$$

Quando una grandezza in esame è di tipo vettoriale, della stessa si possono considerare le proiezioni della stessa lungo le tre direzioni coordinate Ox, Oy, Oz . Lungo tali direzioni si considerano i VERSORI $\underline{a}_x, \underline{a}_y, \underline{a}_z$ che vengono definiti come vettori di intensità unitaria paralleli alle direzioni stesse e con versi uscenti dall'origine secondo la regola della mano destra (orientamento destrogiro). Ciò fatto, una grandezza vettoriale diventa rappresentabile come somma vettoriale delle componenti della stessa lungo le direzioni coordinate:

$$\vec{V} = \vec{V}(P,t) = \underline{a}_x V_x(P,t) + \underline{a}_y V_y(P,t) + \underline{a}_z V_z(P,t)$$

E' evidente la considerazione che l'intensità di ciascuna componente è una grandezza scalare.

Nel prosieguo di questo corso spesso si farà uso, parallelamente ai sistemi di riferimento trirettangoli cartesiani, di sistemi di riferimento diversi, tipo trirettangoli SFERICO e CILINDRICO; l'utilità e le caratteristiche di tali sistemi di riferimento saranno evidenziati di volta in volta. Qui si richiama l'attenzione sul fatto che per trattare alcuni problemi può risultare utile anche fare uso di sistemi di riferimenti di tipo diverso (non trirettangoli e non cartesiani).

In appendice al presente modulo vengono illustrate le corrispondenze tra i sistemi di riferimento cartesiano e sferico.

1.2 CENNI UTILI SUL REGIME SINUSOIDALE

1.2.1 Richiamo delle definizioni di regime sinusoidale

Il regime di variazione di tipo sinusoidale si considera ormai da lungo tempo come il più utile nel rappresentare grandezze periodiche, sia nel tempo che nello spazio.

E' appena il caso di richiamare le definizioni del SENO e del COSENO di un angolo piano (α), come proiezione sui due assi complementari del VETTORE UNITARIO che coincidono con le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo, rispettivamente opposto ed adiacente all'angolo stesso. E' evidente la tendenza della lunghezza del cateto adiacente all'angolo a coincidere con la lunghezza dell'ipotenusa:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos(\alpha) = 1$$

nonché la tendenza a zero della lunghezza del cateto opposto all'angolo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin(\alpha) = 0$$

Similmente è appena il caso di rammentare le proprietà di COMPLEMENTARITA' delle funzioni SENO E COSENO:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \sin(\alpha + \pi/2) \\ \sin(\alpha) &= -\cos(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha - \pi/2) \end{aligned}$$

per indicare chela funzione SENO non è altro che la funzione COSENO spostata INDIETRO con lo stesso segno (ANTICIPO DI FASE) oppure AVANTI con segno opposto (POSTICIPO DI FASE).

1.2.2 Rappresentazione fasoriale di grandezze sinusoidali

Una grandezza variabile nel tempo in maniera sinusoidale è suscettibile della seguente rappresentazione matematica:

a) caso di grandezza scalare variabile solo nel tempo:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

b) caso di grandezza scalare variabile nel tempo e nello spazio:

$$F(P,t) = F(P) \cos(\omega t + \varphi(P))$$

c) caso di una grandezza vettoriale variabile solo nel tempo:

$$\vec{A}(t) = \underline{a}_x A_x \cos(\omega t + \varphi_x) + \underline{a}_y A_y \cos(\omega t + \varphi_y) + \underline{a}_z A_z \cos(\omega t + \varphi_z)$$

d) caso di grandezza vettoriale variabile nel tempo e nello spazio:

$$\vec{A}(P,t) = \underline{a}_x A_x(P) \cos(\omega t + \varphi_x(P)) + \underline{a}_y A_y(P) \cos(\omega t + \varphi_y(P)) + \underline{a}_z A_z(P) \cos(\omega t + \varphi_z(P))$$

Partendo dal caso a), nel piano complesso (piano R^2 rappresentativo dei numeri complessi) si considera un segmento orientato di lunghezza pari ad F con inizio nell'origine del sistema di riferimento e che ruota in verso antiorario con velocità angolare pari ad ω ; tale grandezza a volte, per comodità, viene denominato Vettore Rotante. All'istante $t=0$ l'angolo tra il segmento orientato ed il verso positivo dell'asse delle ascisse sia pari a φ .

a) caso di grandezza scalare variabile solo nel tempo:

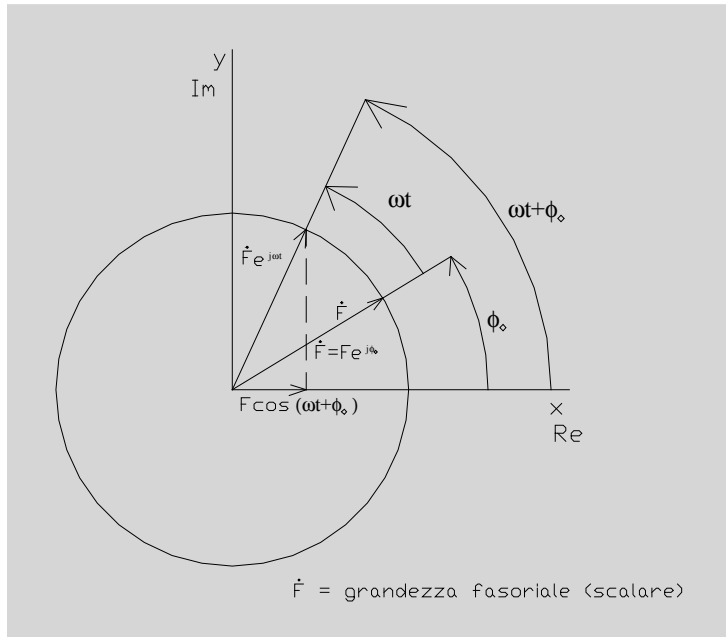
In qualsiasi istante t l'estremo mobile del segmento occuperà nel piano una posizione rappresentabile con la seguente notazione complessa:

$$F e^{j(\omega t + \varphi)} = F \cos(\omega t + \varphi) + j F \sin(\omega t + \varphi) = F e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

In tale espressione si mostra la ovvia possibilità di mettere in evidenza il fattore temporale $e^{j\omega t}$. Il fattore restante $F e^{j\varphi}$ si definisce FASORE; si usa la notazione:

$$\dot{F} = F e^{j\varphi}$$

ed esso è usato per rappresentare la grandezza sinusoidale di partenza.



Partendo dunque da una grandezza rappresentata fasorialmente, per individuare l'andamento della effettiva grandezza tempo variante si procede così:

1° si moltiplica il fasore per il fattore esponenziale $e^{j\omega t}$ ottenendo:

$$F e^{j\varphi} e^{j\omega t} = F e^{j(\omega t + \varphi)} = \text{Re} \{F e^{j(\omega t + \varphi)}\} + j \text{Im} \{F e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

2° tale vettore rotante, proiettato sull'asse reale (asse delle ascisse) rappresenta la effettiva grandezza variabile nel tempo con regime sinusoidale:

$$\text{Re} \{F e^{j(\omega t + \varphi)}\} = F \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$$

Il passaggio agli altri casi illustrati è abbastanza immediato.

b) caso di grandezza scalare variabile nel tempo e nello spazio:

$$f(P, t) = F(P) \cos(\omega t + \varphi(P))$$

Sempre nel piano complesso si considera il vettore rotante:

$F(P) e^{j(\omega t + \varphi(P))}$ dal quale, posto in evidenza il fattore temporale $e^{j\omega t}$, si deduce la grandezza fasoriale rappresentativa:

$$\dot{F}(P) = F(P) e^{j\varphi(P)}$$

Per il ritorno nel dominio effettivo dello spazio e del tempo si procede come illustrato prima:

1° ottenimento del vettore rotante tramite moltiplicazione del fasore per il fattore temporale $e^{j\omega t}$:

$$\dot{F}(P) e^{j\omega t} = F(P) e^{j\varphi(P)} e^{j\omega t} = F(P) e^{j(\omega t + \varphi(P))} = \text{Re} \{F(P) e^{j(\omega t + \varphi(P))}\} + j \text{Im} \{F(P) e^{j(\omega t + \varphi(P))}\}$$

$$\text{Re} \{F(P)e^{j(\omega t + \varphi(P))}\} = F(P) \cos(\omega t + \varphi(P)) = f(P, t)$$

c) caso di una grandezza vettoriale variabile solo nel tempo:

$$\vec{A}(t) = \underline{a}_x A_x \cos(\omega t + \varphi_x) + \underline{a}_y A_y \cos(\omega t + \varphi_y) + \underline{a}_z A_z \cos(\omega t + \varphi_z)$$

Seguendo i passi già illustrati, per ogni componente della grandezza vettoriale si può considerare il corrispondente vettore rotante; ne risulta la scrivibilità della notazione:

$$(\underline{a}_x A_x e^{j\varphi_x} + \underline{a}_y A_y e^{j\varphi_y} + \underline{a}_z A_z e^{j\varphi_z}) e^{j\omega t}.$$

Tale espressione, privata del fattore temporale, fornisce il fasore rappresentativo della grandezza vettoriale; ovviamente anche la grandezza fasoriale è un vettore:

$$\vec{A} = (\underline{a}_x A_x e^{j\varphi_x} + \underline{a}_y A_y e^{j\varphi_y} + \underline{a}_z A_z e^{j\varphi_z})$$

d) caso di grandezza vettoriale variabile nel tempo e nello spazio:

$$\vec{A}(P, t) = \underline{a}_x A_x(P) \cos(\omega t + \varphi_x(P)) + \underline{a}_y A_y(P) \cos(\omega t + \varphi_y(P)) + \underline{a}_z A_z(P) \cos(\omega t + \varphi_z(P))$$

L'estensione di quanto su esposto è immediato:
 la grandezza fasoriale rappresentativa è:

$$\vec{A}(P) = (\underline{a}_x A_x(P) e^{j\varphi_x(P)} + \underline{a}_y A_y(P) e^{j\varphi_y(P)} + \underline{a}_z A_z(P) e^{j\varphi_z(P)})$$

Il passaggio inverso, cioè il passaggio da un fasore rappresentativo di una grandezza vettoriale all'effettivo vettore nel dominio dello spazio-tempo, comporta:

- 1° individuazione delle componenti del fasore nel sistema di riferimento;
- 2° ottenimento dei vettori rotanti relativi a ciascuna componente;
- 3° proiezione dei tre vettori rotanti sull'asse reale;
- 4° composizione delle tre componenti cartesiane variabili nello spazio e nel tempo:

$$\vec{A}(P, t) = \underline{a}_x A_x(P) \cos(\varphi_x(P) + \omega t) + \underline{a}_y A_y(P) \cos(\varphi_y(P) + \omega t) + \underline{a}_z A_z(P) \cos(\varphi_z(P) + \omega t)$$

1.2.3 Utilizzo del grandezze in regime sinusoidale

Un grande utilità delle grandezze variabili in regime sinusoidale è legato alla ricostruibilità di qualsiasi regime COME COMBINAZIONE LINEARE di regimi sinusoidali.

Per accennare brevemente a questo aspetto, è bene limitarsi **inizialmente** a considerare grandezze scalari funzioni della sola variabile temporale:

$$f = f(t)$$

Distinguendo tra REGIMI PERIODICI e REGIMI GENERICI

1.2.3.1 Ricostruibilità di un regime periodico SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Un qualsiasi regime periodico nel dominio del tempo trova la sua rappresentazione generale nella espressione matematica:

$$f(t) = f(t + mT)$$

$\forall t$ (istante) nonché $\forall m$ (numero intero, positivo, negativo, nullo).

E' sufficientemente evidente che la quantità " T " rappresenta l'intervallo temporale trascorso il quale le grandezze si ripresentano con le intensità già viste. Tale intervallo di tempo (intervallo temporale misurabile in secondi) si definisce **PERIODO**. Sono di normale utilizzo le definizioni:

FREQUENZA DEL SEGNALE PERIODICO: $f_0 = \frac{1}{T}$ la cui unità di misura è: sec^{-1} .

PULSAZIONE DEL SEGNALE PERIODICO:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \text{ la cui unità di misura è: } \text{radianti/secondo}.$$

La funzione **periodica** $f(t)$, qualunque essa sia, è ricostruibile attraverso una sviluppo in serie di funzioni sinusoidali:

$$f(t) = f(t+mT) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \text{sen}(n\omega_0 t)\}$$

che è noto come **SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER**

I coefficienti A_n e B_n sono ottenibili dalla funzione periodica di partenza $f(t)$ attraverso le operazioni qui di seguito indicate:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{e:} \quad B_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Si possono dunque rappresentare su un diagramma cartesiano gli andamenti delle grandezze A_n, B_n in funzione della variabile " ω ". Le figure che si ottengono sono figure nelle quali quando è: $\omega = n\omega_0, \forall n$, viene rappresentato un punto ad altezza pari ad A_n ed un punto di altezza pari a B_n ; in corrispondenza di punti diversi si hanno valori di altezza nulla. Tale rappresentazione, consistente nella coppia di insiemi di valori (A_n, B_n) , viene denominato SPETTRO (IN FREQUENZA) DEL SEGNALE PERIODICO.

La conclusione è dunque che un qualsiasi segnale periodico è ricostruibile attraverso una serie di funzioni sinusoidali a **frequenze multiple** della frequenza del segnale periodico. Le intensità (ampiezze) di tali funzioni sinusoidali vengono fornite dallo spettro su indicato che assume valori diversi da zero **solo** in corrispondenza di alcuni punti ($\omega = n\omega_0$) sull'asse delle frequenze. Tale tipo di spettro si definisce SPETTRO DISCRETO. Nello spettro

1.2.3.2 Ricostruibilità di un regime tempo variante NON PERIODICO TRASFORMATA DI FOURIER

Si può **estendere** la trattazione su esposta al caso in cui la durata del periodo di ripetizione tenda all'infinito ($T \rightarrow \infty \Leftrightarrow \omega_0 \rightarrow 0$). E' evidente che a fronte di un periodo di ripetizione che si allunga all'infinito, la funzione $f(t)$ non è più periodica ma è una funzione in regime temporale di tipo generico.

In tale estensione l'operazione, di SOMMA ($\sum_{n=0}^{\infty}$) si trasforma in una operazione di integrazione e lo SPETTRO del segnale non è più una funzione a valori discreti diventando una funzione continua:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)\} d\omega$$

le espressioni dello SPETTRO CONTINUO diventano:

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad e: \quad B(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Alla coppia di funzioni $A(\omega), B(\omega)$ viene attribuita la denominazione di TRASFORMATA DI FOURIER del segnale $f(t)$

Si conclude dunque che un segnale tempo variante secondo un **generico andamento** nel tempo $f(t)$, è ricostruibile attraverso l'integrazione di funzioni sinusoidali di frequenze generiche (**integrazione nel dominio delle frequenze**) una volta note le funzioni $A(\omega), B(\omega)$, che forniscono le ampiezze (**infinitesime**) delle varie componenti ($A(\omega)d\omega, B(\omega)d\omega$) alle **infinite** frequenze. Le funzioni $A(\omega), B(\omega)$ rappresentano dunque delle intensità (ampiezze) specifiche e costituiscono lo SPETTRO CONTINUO del segnale ad andamento generico che sostituisce lo spettro discreto dei segnali periodici.

1.3 FENOMENI PROPAGATIVI - ONDE

1.3.1 Concetti generali riguardanti i fenomeni propagativi

Il concetto di fenomeni propagativi è di comprensione immediata allorquando si considera una grandezza variabile sia nello spazio che nel tempo $\vec{f}(P, t)$ per la quale tali dipendenze sono interconnesse tra loro. Per illustrare nel modo più semplice tutto ciò, si può fare riferimento ad una grandezza scalare per la quale la variazione nello spazio avviene solo per spostamenti lungo una direzione: si può far coincidere tale direzione con uno degli assi coordinati, ad esempio l'asse "z". La grandezza che si considera è dunque del tipo:

$$f = f(z, t)$$

e l'interconnessione delle dipendenze dallo spazio e dal tempo è evidente per una funzione così strutturata:

$$f = f(z, t) = A_0 \cos(\omega t \pm kz)$$

nella quale appaiono come costanti i seguenti parametri:

- A_0 = AMPIEZZA
- ω = PULSAZIONE (unità di misura: radianti/secondo)
- k = COSTANTE DI PROPAGAZIONE (unità di misura: metri⁻¹)

E' facile constatare che se un fenomeno fisico è rappresentabile tramite tale funzione esso è di tipo propagativo nel senso che il valore assunto dalla grandezza in una posizione z_1 all'istante t_1 lo si ritrova in un istante successivo t_2 in una posizione diversa z_2 :

$$f(z_2, t_2) = A_0 \cos(\omega t_2 \pm kz_2) = f(z_1, t_1) = A_0 \cos(\omega t_1 \pm kz_1)$$

Affinchè ciò sia è sufficiente che la coppia di posizioni (z_1, z_2) sia legata alla coppia degli istanti di osservazione (t_1, t_2) dalla relazione:

$$\omega t_2 \pm kz_2 = \omega t_1 \pm kz_1 + (2\pi) * m$$

nella quale m rappresenta un qualsiasi numero intero: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

L'espressione appena scritta consente di illustrare alcune definizioni essenziali per i fenomeni propagativi, che vengono comunemente chiamati ONDE. Il primo di tali concetti è quello di VELOCITA' che emerge immediatamente se nella espressione su scritta si sceglie $m = 0$ e si spostano i vari addendi:

$$\pm k(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

riarrangiando si può leggere il rapporto incrementale come VELOCITA':

$$c = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \mp \frac{\omega}{k}$$

Una velocità negativa sta ad indicare che al trascorre del tempo il segnale si sposta nel verso delle "z" decrescenti; in tal caso si parla di ONDA INVERSA, mentre per il caso di velocità positiva si parla di ONDA DIRETTA.

L'altra importante definizione viene fuori quando si indaga circa la possibilità che in uno stesso istante vi siano diverse posizioni nelle quali la funzione assuma valori identici; la risposta la si ottiene dalla relazione su scritta ponendo $t_2 = t_1$:

$$\omega t_2 \pm kz_2 = \omega t_1 \pm kz_1 + (2\pi) * m \Rightarrow \pm kz_2 = \pm kz_1 + (2\pi) * m \Rightarrow (z_2 - z_1) = \pm \frac{2\pi}{k} * m = \pm m\lambda$$

Nel caso dunque di regimi sinusoidali si definisce la LUNGHEZZA D'ONDA:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

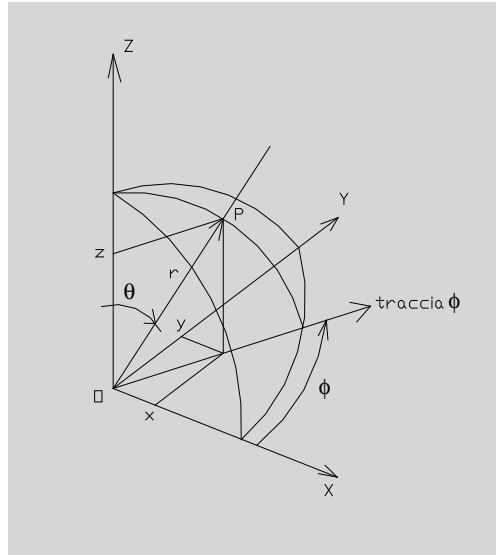
come distanza minima tra due posizione nelle quali la grandezza propagativa (ONDA) presenta contemporaneamente (NELLO STESSO ISTANTE) il medesimo valore.

E' banale considerare che mentre per un fenomeno propagativo in regime generico è definibile il parametro "velocità", la lunghezza d'onda è definibile solo per regimi periodici.

APPENDICE 1A

Sistemi di riferimento geometrici

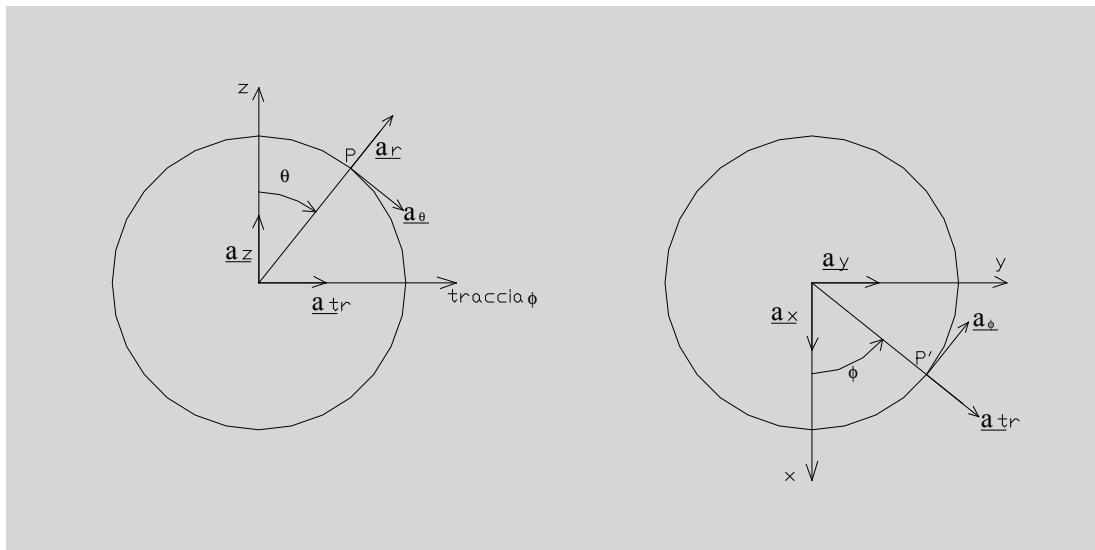
L'andamento nello spazio dei campi elettromagnetici viene seguito adottando un sistema di riferimento di tipo trirettangolo sferico $O-r, \vartheta, \varphi$ associato ad un sistema di riferimento trirettangolo cartesiano $O-x, y, z$.



La convenzione standard adottata è quella di leggere la coordinata zenitale ϑ rispetto all'asse z e la coordinata azimutale φ rispetto all'asse x, così che risulta:

$$z = r \cos \vartheta ; \quad x = r \sin \vartheta \cos \varphi ; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi .$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) ; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$



Passaggio dai versori in coordinate cartesiane ai versori in coordinate sferiche

$$\underline{a}_r = \underline{a}_x \cos \varphi + \underline{a}_y \sin \varphi$$

$$\underline{a}_r = \underline{a}_z \cos \vartheta + \underline{a}_r \sin \vartheta = \underline{a}_z \cos \vartheta + \underline{a}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \underline{a}_y \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\underline{a}_\vartheta = -\underline{a}_z \sin \vartheta + \underline{a}_r \cos \vartheta = -\underline{a}_z \sin \vartheta + \underline{a}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{a}_y \cos \vartheta \sin \varphi$$

$$\underline{a}_\varphi = -\underline{a}_x \sin \varphi + \underline{a}_y \cos \varphi$$

Di tali formule di trasformazione si può considerare la rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_r \\ \underline{a}_\vartheta \\ \underline{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\vartheta \cos\varphi & \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \text{sen}\varphi & -\text{sen}\vartheta \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \\ \underline{a}_z \end{bmatrix}$$

Passaggio dai versori in coordinate sferiche ai versori in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} \underline{a}_r &= \underline{a}_x \text{sen}\vartheta + \underline{a}_y \cos\vartheta = \underline{a}_x \cos\varphi + \underline{a}_y \text{sen}\varphi \\ \underline{a}_x &= -\underline{a}_\varphi \text{sen}\varphi + \underline{a}_r \cos\varphi = -\underline{a}_\varphi \text{sen}\varphi + \underline{a}_\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta + \underline{a}_r \cos\varphi \text{sen}\vartheta \\ \underline{a}_y &= \underline{a}_\varphi \cos\varphi + \underline{a}_r \text{sen}\varphi = \underline{a}_\varphi \cos\varphi + \underline{a}_\vartheta \text{sen}\varphi \cos\vartheta + \underline{a}_r \text{sen}\varphi \text{sen}\vartheta \\ \underline{a}_z &= \underline{a}_r \cos\vartheta - \underline{a}_\vartheta \text{sen}\vartheta \end{aligned}$$

Rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \\ \underline{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\text{sen}\vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_r \\ \underline{a}_\vartheta \\ \underline{a}_\varphi \end{bmatrix}$$

Similmente per una grandezza vettoriale \vec{f} si possono considerare le decomposizioni in coordinate cartesiane ed in coordinate sferiche:
 c. cartesiane:

$$\vec{f} = \underline{a}_x f_x + \underline{a}_y f_y + \underline{a}_z f_z$$

La forma matriciale:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \\ \underline{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\text{sen}\vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_r \\ \underline{a}_\vartheta \\ \underline{a}_\varphi \end{bmatrix}$$

fornisce immediatamente il passaggio in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} f_r &= f_x \text{sen}\vartheta \cos\varphi + f_y \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi + f_z \cos\vartheta \\ f_\vartheta &= f_x \cos\vartheta \cos\varphi + f_y \cos\vartheta \text{sen}\varphi - f_z \text{sen}\vartheta \\ f_\varphi &= -f_x \text{sen}\varphi + f_y \cos\varphi \end{aligned}$$

Similmente dalla rappresentazione matriciale dell'espressione in coordinate sferiche:

$$\vec{f} = \underline{a}_r f_r + \underline{a}_\vartheta f_\vartheta + \underline{a}_\varphi f_\varphi$$

si passa agevolmente alla trasformazione inversa:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_r \\ f_\vartheta \\ f_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_r \\ \underline{a}_\vartheta \\ \underline{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r \\ f_\vartheta \\ f_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}\vartheta \cos\varphi & \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \text{sen}\varphi & -\text{sen}\vartheta \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \\ \underline{a}_z \end{bmatrix}$$

$$f_x = f_r \text{sen}\vartheta \cos\varphi + f_\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - f_\varphi \text{sen}\varphi$$

Corso di Antenne e compatibilità e.m. AA 2009-10
Docente: Prof. Ing. Michele Bozzetti
Modulo UNO – Variabilità spazio temporale di interesse

$$f_x = f_r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi + f_\vartheta \cos \vartheta \operatorname{sen} \varphi + f_\varphi \cos \varphi$$

$$f_z = f_r \cos \vartheta - f_\vartheta \operatorname{sen} \vartheta$$